

三次 Bézier 曲线分切算法在电信网管中的应用

江丽凡, 鄢定明, 黄 晓

(武汉邮电科学研究院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 曲线是任何图形方法中不可缺少的组件, 也是电信网管拓扑图的一种方法, 利用曲线可绕开节点, 避免重叠。网络节点愈多, 曲线愈显得重要。文章在探索 Bézier 曲线性质后, 给出了三次 Bézier 曲线的分切算法, 及其在网管拓扑图中实现, 这种应用可使界面获得很大改进, 并且稳定性极高。

关键词: Bézier 曲线; 分切; 图形

中图分类号: TN915 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-8788(2006)01-0023-03

The application of splitting algorithm for cubic Bézier curve in telecom network management

JIANG Li-fan, YAN Ding-ming, HUANG Xiao

(Wuhan Research Institute of Posts and Telecommunications, Wuhan 430074, China)

Abstract: Curve is a necessary subassembly for any graphic method, also in topology drawings of network management. To avoid nodes overlapping making use of curve is very important, more network nodes, more important. In this paper an algorithm for splitting cubic Bézier based on the research on property of Bézier curve is given. The algorithm has been realized in the topology drawings of network management, which much improves the interface and has higher stability.

Key words: Bézier curve; split; graph

在电信网管拓扑图中, 节点数目很多时, 节点间链路的直连可能会覆盖其它节点或链路, 造成歧义。若能改变连线的线性, 将直线变成曲线, 使链路绕道而行, 避免链路、节点间的相互重叠, 则能有效地解决这一问题。本文将给出构造这类曲线的一种实际算法并予以应用。

1 Bézier 曲线

Bézier 曲线, 由于容易计算并且很稳定, 已被广泛应用于工业设计和绘图领域。考虑二维平面上 $N+1$ 个控制点 ($k=0, L, B$) 的 Bézier 曲线。Bézier 曲线参数方程可用下式表示:

$$C(u) = \sum_{k=0}^N p_k B_{k,N}(u) \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (1)$$

式中, $B_{k,N}(u) = C_N^k u^k (1-u)^{N-k} = \frac{N!}{k! (N-k)!} u^k \cdot (1-u)^{N-k}$ 称为 Bernstein 多项式, 当 u 在 0、1 之间连续变化时, 可由式(1)得到 Bézier 曲线上的每一点。

根据式(1)及 Bernstein 多项式可推出 Bézier 曲线如下的性质:

(1) 切 矢 量。 因 为 $C'(u) = N \sum_{k=0}^{N-1} p_k [B_{k,N-1}(u) - B_{k+1,N-1}(u)]$, 当 $u=0$ 时, $C'(0) = N(p_1 - p_0)$; $u=1$ 时, $C'(1) = N(p_N - p_{N-1})$, 这说

明 Bézier 曲线在起点和终点处的切线方向是 $P_0 P_1$ 和 $P_N P_{N-1}$ 。

(2) 对称性。因为 Bernstein 多项式具有对称性, $B_{k,N}(u) = C_N^k u^k (1-u)^{N-k} = C_N^{N-k} [1 - (1-u)]^{N-(N-k)} (1-u)^{N-k} = B_{N-k,N}(1-u)$, 所以 $C(t) =$

$$\sum_{k=0}^N p_k B_{k,N}(u) = \sum_{k=0}^N p_k B_{N-k,N}(u), C(1-u) = \sum_{k=0}^N p_k B_{k,N}(1-u) = \sum_{k=0}^N p_k B_{N-k,N}(1-u), \text{ 这表明}$$

Bézier 曲线的起点和终点的性质完全相同。

2 三次 Bézier 曲线

$N=3$ 时由式(1)可推出 4 个控制点的 Bézier 曲线公式:

$$C(u) = \sum_{k=0}^3 p_k \frac{3!}{k! (3-k)!} u^k (1-u)^{3-k} = (1-u)^3 p_0 + 3u(1-u)^2 p_1 + 3u^2(1-u) p_2 + u^3 p_3. \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (2)$$

对于平面上一条确定的 Bézier 曲线, 两个锚点和方向点都是已知的, 所以它是关于比例参数的三次方程, 称为三次 Bézier 曲线。

3 分切 Bézier 曲线

分切 Bézier 曲线就是将一段 Bézier 曲线分成多段, 但他们的表现应是完全相同的, 如图1所示。切

收稿日期: 2005-01-05
作者简介: 江丽凡(1979-), 女, 湖北武汉人, 硕士, 主要研究方向为数字通信。

点 P_{new} 将由 (P_0, P_1, P_2, P_3) 确定的一段 Bézier 曲线分成两段, 分别由 $(P_0, P_{11}, P_{12}, P_{new})$ 和 $(P_{new}, P_{21}, P_{22}, P_3)$ 确定。由于锚点的改变, 导致新增两个方向点, 同时原有方向点的距离产生变化。

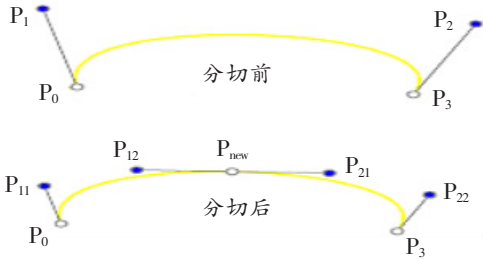


图 1 分切 Bézier 曲线

假定系统能返回切点 P_{new} 的正确值, 下面将研究分切的算法, 即要求出分切后所有的方向点(下面所涉及的所有参数具有 x, y 两个坐标)。以前一段为例, 由 Bézier 曲线的性质可知: 在 $(P_0, P_{11}, P_{12}, P_{new})$ 段任取一点 P_R , 它应该也满足 (P_0, P_1, P_2, P_3) 段的参数方程。

假设 P_{new} 在 (P_0, P_1, P_2, P_3) 段的比例为 U_{new} , 这个任意一点 P_R 在 (P_0, P_1, P_2, P_3) 段的比例为 u_1 ($0 \leq u_1 \leq u_{new}$), 在 $(P_0, P_{11}, P_{12}, P_{new})$ 的比例为 u_2 , 则可以得出

$$u_2 = \frac{u_1}{u_{new}}, \tag{3}$$

那么 P_R 应满足等式:

$$C_1(u_1) = C_2(u_2), \tag{4}$$

为了方便起见, 将式(4)写成比例 u 的集中表达式:

$$C(u) = au^3 + bu^2 + cu + d, \tag{5}$$

式中,

$$\begin{cases} c.x = 3(p_1.x - p_0.x) \\ c.y = 3(p_1.y - p_0.y) \end{cases}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} b.x = 3(p_2.x - p_1.x) - c.x = 3(p_2.x + p_0.x - 2p_1.x) \\ b.y = 3(p_2.y - p_1.y) - c.y = 3(p_2.y + p_0.y - 2p_1.y) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} a.x = p_3.x - p_0.x - c.x - b.x = p_3.x - p_0.x - 3(p_2.x - p_1.x) \\ a.y = p_3.y - p_0.y - c.y - b.y = p_3.y - p_0.y - 3(p_2.y - p_1.y) \end{cases}, \tag{8}$$

$$\begin{cases} d.x = p_0.x \\ d.y = p_0.y \end{cases}, \tag{9}$$

(对 (P_0, P_1, P_2, P_3) 段而言)

并代入 $u_1 = u_{new}u_2$, 用 a, b, c, d 的下标‘1’代表

(P_0, P_1, P_2, P_3) 段, 下标‘2’代表 $(P_0, P_{11}, P_{12}, P_{new})$ 段, 则式(4)可以写成:

$$\begin{aligned} a_2u_2^3 + b_2u_2^2 + c_2u_2 + d_2 &= \\ a_1u_1^3 + b_1u_1^2 + c_1u_1 + d_1 &= \\ a_1u_{new}^3u_2^3 + b_1u_{new}^2u_2^2 + c_1u_{new}u_2 + d_1. \end{aligned} \tag{10}$$

按式(9)将式(10)写出 u_2 的表达式:

$$\begin{aligned} (a_2 - a_1u_{new}^3)u_2^3 + (b_2 - b_1u_{new}^2)u_2^2 + \\ (c_2 - c_1u_{new})u_2 &= 0, \\ (a_2 - a_1u_{new}^3)u_2^2 + (b_2 - b_1u_{new}^2)u_2 + \\ (c_2 - c_1u_{new}) &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

式(4)、式(5)对于任何 $0 \leq u_2 \leq 1$ 都成立, 必然要求其系数全为零, 联立式(6)、式(7), 可以得到

$$c_2 = c_1u_{new} \Rightarrow \begin{cases} p_{11}.x = p_0.x + u_{new}(p_1.x - p_0.x), \\ p_{11}.y = p_0.y + u_{new}(p_1.y - p_0.y) \end{cases}, \tag{12}$$

$$b_2 = b_1u_{new}^2 \Rightarrow \begin{cases} p_{12}.x = (p_2.x + p_0.x - 2p_1.x) \cdot u_{new}^2 + 2p_{11}.x - p_0.x \\ p_{12}.y = (p_2.y + p_0.y - 2p_1.y) \cdot u_{new}^2 + 2p_{11}.y - p_0.y. \end{cases} \tag{13}$$

式(12)和式(13)中, 除 u_{new} 外, 其它都是已知, 所以最后的任务就是计算 u_{new} 为 P_{new} 在 (P_0, P_1, P_2, P_3) 段的比例, 满足公式:

$$\begin{aligned} a_1u_{new}^3 + b_1u_{new}^2 + c_1u_{new} + d_1 &= p_{new} \Rightarrow \\ a_1u_{new}^3 + b_1u_{new}^2 + c_1u_{new} + e_1 &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

式中 $e_1 = d_1 - p_{new}$ 。

分别列出 x, y 轴方程, 发现这是两个一元三次方程, 考虑:

(1) 若 $a_1 = 0$, 实为一元二次方程, 可任解一个 x 轴或 y 轴。

(2) 若 $a_1 \neq 0$, 则需要联立 x, y 两个方程, 然后消去 u_{new} 的最高次, 将三次方程转换为二次方程, 其后的解法与(1)相同。

可按如下的步骤求解:

$$\begin{aligned} &\text{if}(a_1.y = 0), \\ &\quad \begin{cases} m = b_1.y \\ n = c_1.y, \\ r = e_1.y \end{cases} \end{aligned}$$

令

$$\text{else } \begin{cases} k = a_1 \cdot x / a_1 \cdot y \\ m = b_1 \cdot x - b_1 \cdot yk \\ n = c_1 \cdot x - c_1 \cdot yk \\ r = e_1 \cdot x - e_1 \cdot yk, \end{cases}$$

若 $(a_1 \cdot x = 0)$ 类似。

至此,三次方程已被转换为二次方程: $mu_{new}^2 + nu_{new} + r = 0$,利用韦达定理解一元二次方程,求出 u_{new} ,再代入式(12)、式(13)即可得到分切的前一段的方向点 P_{11}, P_{12} 。同理,因为 Bézier 曲线的终点具有和起点完全相同的性质,那么以 P_3 为起点,按 P_{new} 在 (P_3, P_2, P_1, P_0) 段,可得到 $(P_3, P_{22}, P_{21}, P_{new})$ 段的两个方向点 P_{21}, P_{22} :

$$\begin{cases} p_{22} \cdot x = p_3 \cdot x + u_3 (p_2 \cdot x - p_3 \cdot x) \\ p_{22} \cdot y = p_3 \cdot y + u_3 (p_2 \cdot y - p_3 \cdot y) \end{cases}, \quad (15)$$

$$\begin{cases} p_{21} \cdot x = (p_1 \cdot x + p_3 \cdot x - 2p_2 \cdot x) \cdot u_3^2 + 2p_{22} \cdot x - p_3 \cdot x \\ p_{21} \cdot y = (p_1 \cdot y + p_3 \cdot y - 2p_2 \cdot y) \cdot u_3^2 + 2p_{22} \cdot y - p_3 \cdot y \end{cases}, \quad (16)$$

式中, $u_3 = 1 - u_{new}$ 。

这样两段新的 Bézier 曲线的方向点都得到了,拖动或改变它们的锚点和方向点,将改变 Bézier 曲线的形状和位置,可以利用这些性质构造任意完美的线条。

4 三次 Bézier 曲线分切算法在电信网管中的应用

利用本文的分切算法,将 Bézier 曲线一分为二,实现其编辑功能,可在电信网管拓扑图中构造自由曲线,如图2所示。用户可根据菜单上提供的各种

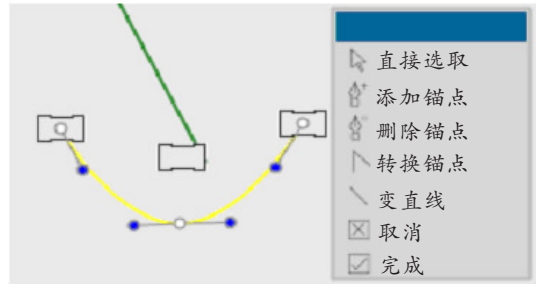


图2 由本算法实现的 Bézier 曲线

功能,对曲线进行编辑,例如按需要改变各个控制点的位置,增加或删除控制点的个数等等,就可生成用户需求的任意曲线,有效地避开网络节点。其中,“添加锚点”功能实现分切算法是最重要的一个步骤。不仅如此,曲线功能的引入还改变了链路直连的呆板状况,用户可根据实际的线路走势,按菜单上的各种操作,精心编辑曲线,赋予拓扑管理以生动的形象。

5 结束语

Bézier 曲线是在工程应用中使用颇多的一种曲线,而 SVG 是一种无“锯齿”的可伸缩矢量图形,它可以完美流畅地表现 Bézier 曲线。在电信网管拓扑图中将 Bézier 曲线应用与 SVG 矢量图形结合起来,并利用 Bézier 曲线的分切算法,塑造各种自由曲线,也是该网管拓扑图的一个新颖之处。

参考文献:

- [1] 孙家广. 计算机图形学(第三版) [M]. 北京:清华大学出版社,1998。

(上接第7页)

3 结束语

TRIP 是 IETF 为了解决 IP 域之间或者 IP 域向 PSTN 域进行电话路由的问题而提出的。TRIP 能很好地支持多种应用协议,包括 H.323、SIP 等。TRIP 本身的特点决定了它能很好地完成全域电话路由的功能,所以 TRIP 可能成为今后软交换应用中不可缺少的重要部分。

参考文献:

- [1] 赵慧玲,叶华. 以软交换为核心的下一代网络技术

[M]. 北京:人民邮电出版社,2003。

- [2] IETF RFC2871 - 2000, A Framework for Telephony Routing over IP [S].
 [3] IETF RFC 3219 - 2002, Telephony Routing over IP (TRIP) [S].
 [4] 马军锋. TRIP 路由协议及其应用 [Z]. 北京:信产部电信研究院通信标准研究所,2004。
 [5] 吴晔,王芙蓉,莫益军. TRIP 在软交换中的应用研究 [DB/OL]. <http://www.ydshs.com/keyan/2003-1/03-1.htm>,2003-03-20。
 [6] YDC-003-2001,软交换设备总体技术要求 [S].